Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Enero-MArzo 2009

Nombre: ______________________________

Carnet: __________________ Sección: ______

MA-3111—Primer Parcial, Modelo 2009, 35 %— 1:30 p.m.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE; $a \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$u(x)$	$U(z)$
$\alpha u(x) + \beta v(x)$	$\alpha U(z) + \beta V(z)$
$u'_{gen}(x)$	$zU(z)$
$u^{(k)}_{gen}(x)$	$z^k U(z)$
$xu(x)$	$-U'(z)$
$u(x-a)$	$U(z)e^{-az}$
$e^{\alpha x}u(x)$	$U(z-\alpha)$
$u * v(x)$	$U(z)V(z)$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$\delta(x)$	1
$\delta^{(k)}(x)$	z^k
$\delta^{(k)}(x-a)$	$z^k e^{-az}$
$H(x)$	$\frac{1}{z}$
$H(x)e^{\alpha x}$	$\frac{1}{z-\alpha}$
$H(x)\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{z^k}$

$\longrightarrow$

$u(x)$	$U(z)$
$H(x)e^{\alpha x}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$	$\frac{1}{(z-\alpha)^k}$
$H(x)\operatorname{sen}(ax)$	$\frac{a}{z^2+a^2}$
$H(x)\cos(ax)$	$\frac{z}{z^2+a^2}$
$H(x)\operatorname{senh}(ax)$	$\frac{a}{z^2-a^2}$
$H(x)\cosh(ax)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$

---

1. Explica que particularidad poseen los coeficientes de fourier de una función 2π-periódica en las siguientes situaciones:
a) La función es antiperiódica $f(x+\pi) = -f(x)$
b) $f(x+\pi) = f(x)$
c) La función tiene centros de simetría en los puntos $(0,0)$ y $(\pm\pi/2, 0$.
d) La función tiene un centro de simetría en $(0,0)$ y dos ejes de simepría en $x = \pm\pi/2$.

Solución
a) Lo mejor es simplemente calcularlos directamente:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx\right)$$

Vamos a tratar de escribir la primera de las integrales en términos de la segunda. Para eso hacemos el cambio de variables $x = \xi - \pi$ de modo que

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx = \int_{0}^{\pi} f(\xi+\pi)\cos(n\xi - n\pi)d\xi = -(-1)^n\int_{0}^{\pi} f(\xi)\cos(n\xi)d\xi$$

Es decir si n es impar resulta ser igual al segundo término pero si n es par es igual pero de signo opuesto, con lo que $a_n = 0$. Por otra parte

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(x)\cos(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx\right)$$

$$\int_{-\pi}^{0} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \int_{0}^{\pi} f(\xi+\pi)\,\mathrm{sen}(n\xi - n\pi)d\xi = -(-1)^n\int_{0}^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{sen}(n\xi)d\xi$$

Obtenemos el mismo resultado para b_n. En conclusión podemos asegurar que para estas funciones $a_{2k} = b_{2k} = 0$.
b) El cálculo es similar al apartado a) pero en este caso podemos asegurar que los términos impares son nulos, $a_{2k+1} = b_{2k+1} = 0$
c) Este es más difícil porque hay que pensar un poquito. Que una función tenga un centro de simetría en un punto $(a, 0)$ significa que $f(a + x) = -f(a - x)$. Si $(0, 0)$ es un centro de simetría entonces la función es impar. Como sabrán eso implica que $a_n = 0$. Que $(\pi/2, 0)$ sea un centro de simetría significa que $f(x + \pi/2) = -f(\pi/2 - x)$ esto es lo mismo que decir que $f(x) = -f(\pi - x)$. Es normal que te cueste un tiempo ver estas ecuaciones. Tomate el tiempo, haz dibujos, lo que necesites para convencerte. Ahora vemaos que sucede con b_n

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\left(\int_{0}^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx\right)$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)dx = \int_{\pi/2}^{0} f(\pi-\xi)\,\mathrm{sen}(n(\pi-\xi))(-1)d\xi = (-1)^n\int_{0}^{\pi/2} f(\xi)\,\mathrm{sen}(n\xi)d\xi$$

Primero usamos que la función es impar, por lo que no es necesario integrar a la izquirda del cero. Despues dividimos la segunda integral en dos nuevas integrales. entonces nos concentramos en la segunda integral para tratar de llevarla a la primera. Realizamos el cambio de variable $\xi = \pi - x$ y usamos la relación $f(x) = -f(\pi - x)$ y que $\mathrm{sen}(n(\xi - \pi)) = (-1)^n\,\mathrm{sen}(n\xi)$, si sigues la pista de los siginos creo que alcanzarás la misma conclusión que yo, si n es impar $b_n = 0$. La conclusión final es que $a_k = b_{2k+1} = 0$.
d) Este es muy similar al caso anterior. Si hay un eje de simetría en $x = a$ significa que $f(a + x) = f(a - x)$. Si haces una cuenta similar a la anterior debes llegar a la conclusión $a_k = b_{2k} = 0$.

2. Conociendo los coeficientes de Fourier a_n y b_n de una función 2π periódica $f(x)$ integrable, calcular los coeficientes de Fourier de la función

$$F(x) = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} f(\xi)d\xi$$

Solución
Simplemente calculamos los coeficientes introduciendo la serie de Fourier

$$f(\xi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)$$

$$F(x) = \frac{1}{2T}\int_{x-T}^{x+T} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\xi) + b_n \operatorname{sen}(n\xi) \right) d\xi =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2T}\int_{x-T}^{x+T} \cos(n\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2T}\int_{x-T}^{x+T} \operatorname{sen}(n\xi)d\xi =$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2nT}(\operatorname{sen}(nx+nT) - \operatorname{sen}(nx-nT)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2nT}(-\cos(nx+nT) + \cos(nx-nT))$$

Ahora usamos las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}(nx+nT) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nT) + \cos(nx)\operatorname{sen}(nT) \qquad \cos(nx+nT) = \cos(nx)\cos(nT) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nT)$$
$$\operatorname{sen}(nx-nT) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nT) - \cos(nx)\operatorname{sen}(nT) \qquad \cos(nx-nT) = \cos(nx)\cos(nT) + \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nT)$$
$$\operatorname{sen}(nx+nT) - \operatorname{sen}(nx-nT) = 2\cos(nx)\operatorname{sen}(nT) \qquad \cos(nx+nT) - \cos(nx-nT) = -2\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(nT)$$

De forma que:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{nT}\operatorname{sen}(nT)\cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{nT}\operatorname{sen}(nT)\operatorname{sen}(nx)$$

Por lo tanto llegamos a la conclusión de que los coeficientes de Fourier A_n y B_n de la función $F(x)$ son

$$A_0 = a_0$$
$$A_n = \frac{\operatorname{sen}(nT)}{nT} b_n$$
$$B_n = \frac{\operatorname{sen}(nT)}{nT} a_n$$

3. (12 ptos.) Halle una distribución causal tal que su transformada de Laplace sea:

$$\frac{z^4}{(z^2+4z+4)^2}$$

Solución
Este es un problema de cálculo, puede resolverse de muchas maneras, algunas más largas otrás más cortas. Lo importante es agarrar un camino y seguirlo. Voy a usar tres propiedades de la tabla:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z^2+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

De ahi si derivamos en el lado de la izquierda tenemos que multiplicar por $-x$ en el de la derecha:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2z}{(z^2+2)^2}\right) = \frac{-x}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

Si multiplicamos por z^3 a la izquierda tenemos que derivar tres veces a la derecha:

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) - xH(x)\cos(\sqrt{2}x)$$

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)'' = -H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) - H(x)\cos(\sqrt{2}x) + x\sqrt{2}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)$$

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{2}}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)\right)''' = -\sqrt{2}H(x)\cos(\sqrt{2}x) - \delta(x) + 2\sqrt{2}H(x)\operatorname{sen}(\sqrt{2}x) + 2xH(x)\cos(\sqrt{2}x)$$

De manera que la respuesta final es $1/2$ de este resultado. El problema puede hacerse de manera mucho más larga, claro está.

4. (17 ptos.) Resuelva el siguiente problema de Cauchy reduciendo a funciones causales.

$$\begin{cases} y''(x) - 4y(x) = 5\cosh(3x) \\ y(-1) = 0 \\ y'(-1) = 1 \end{cases}$$

Solución
En este caso no hay que pensar. Lo primero que hay que hacer es llevar el problema a funciones causales.
Paso 1: funciones causales
$u(x) = H(x+1)y(x)$, date cuenta que usamos el hecho de que la condición inicial esta en $x = -1$ para escribir la forma de la función causal. Ahora usamos las condiciones iniciales para escribir las derivadas de $u(x)$:

$$u'(x) = y'(x)H(x+1) + y(x)\delta(x+1) = y'(x)H(x+1)$$
$$u''(x) = y'(x)\delta(x+1) + y''(x)H(x+1) = y'(x) + H(x+1)y''(x)$$

No procedas antes de entenbder bien este paso. La ecuación diferencial que tenemos que resolver es:

$$u''(x) - 4u(x) = H(x+1)5\cosh(3x) + \delta(x+1)$$

Asegúrate de entender todo bien hasta aquí, mira bien los signos. Este paso ha sido fácil.
Paso 1: Transformada de Lapalace
Ahora tenemos dos posibilidades. O bien transformamos la ecuación completa por Laplace o bien encontramos la función de Green y luego hacemos el producto de convolución. Vamos a seguir el primer camino que es generalmente más corto. Transformamos por Laplace ambos miembros de la ecuación:

$$U(z)(z^2-4) = e^z + 5\mathcal{L}\left[H(x+1)\cosh(3x)\right](z)$$

No puedo hacer directamente por tablas esta transformada de Laplace, porque no tengo ni $H(x)\cosh(3x)$ ni $H(x+1)\cosh(3(x+1))$. Fijate bien en este punto porque es fácil equivocarse. Si tengo delate de la función una $H(x+a)$ tengo que escribir todo en función de $x+a$ para poder emplear las tablas. Hagamoslo:

$$\mathcal{L}\left[H(x+1)\cosh(3x)\right](z) = \mathcal{L}\left[H(x+1)\cosh(3x+3-3)\right](z) =$$
$$\frac{1}{2}\mathcal{L}\left[H(x+1)\left\{e^{3(x+1)}e^{-3} + e^{-3(x+1)}e^{3}\right\}\right](z) =$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{e^{z-3}}{z-3} + \frac{e^{z+3}}{z+3}\right) = e^z\frac{(z+3)e^{-3} + e^3(z-3)}{2(z^2-9)} = e^z\frac{z\cosh 3 - 3\,\mathrm{senh}\, 3}{z^2-9}$$

Un resultado bastante secillo, parecido al de $\cosh(3x)$, pero no es exactamente este. Ya podemos escribir la transformada de Laplace de nuestra función:

$$U(z) = \frac{e^z}{z^2-4} + 5e^z\frac{z\cosh 3 - 3\,\mathrm{senh}\, 3}{(z^2-9)(z^2-4)}$$

Paso 3: Antitransformamos

Lo que hay que hacer aqui es escribirlo todo en fracciones simples de tal manera que podamos usar las tablas:

$$\frac{5}{(z^2-9)(z^2-4)} = \frac{1}{z^2-9} - \frac{1}{z^2-4}$$

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^z}{z^2-4} + \frac{5e^z(z\cosh 3 - 3\operatorname{senh} 3)}{(z^2-9)(z^2-4)}\right) =$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^z}{z^2-4}\right)(x) + \mathcal{L}^{-1}\left((z\cosh 3 - 3\operatorname{senh} 3)\left(\frac{1}{z^2-9} - \frac{1}{z^2-4}\right)\right)(x)$$

Ahora sólo hay que saber usar las tablas.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^z}{z^2-4}\right)(x) = H(x+1)\frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x+2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{ze^z}{z^2-9}\right)(x) = H(x+1)\cosh(3x+3) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{ze^z}{z^2-4}\right)(x) = H(x+1)\cosh(2x+2)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^z}{z^2-9}\right)(x) = \frac{1}{3}H(x+1)\operatorname{senh}(3x+3) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^z}{z^2-4}\right)(x) = \frac{1}{2}H(x+1)\operatorname{senh}(2x+2)$$

Sólo nos queda juntar todos los términos

$$y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x+2) + \cosh 3\left(\cosh(3x+3) - \cosh(2x+2)\right) -$$

$$\operatorname{senh} 3\left(\operatorname{senh}(3x+3) - \frac{3}{2}\operatorname{senh}(2x+2)\right)$$

Aunque esa es efectivamente la respuesta final es de muy poco uso esxrita así. Conviene simplificarla. Una forma muy simple de hacerla más legible es escribirla en términos de exponenciales. Otra es usar identidades trigonométricas de las funciones hipervólicas:

$$\cosh 3\cosh(3x+3) - \operatorname{senh} 3\operatorname{senh}(3x+3) = \cosh 3x$$

$$y(x) = \cosh 3x + \frac{1}{2}\operatorname{senh}(2x+2) - \cosh 3\cosh(2x+2) + \frac{3}{2}\operatorname{senh} 3\operatorname{senh}(2x+2)$$

Vamos a a hacer el problema de otra manera que en este caso va a aresultar mucho más simple. Otra forma que ustedes conocen bien desde matemáticas IV.

La solución de más general de la ecuación homogénea es:

$$y_H''(x) - 4y_H(x) = 0 \Rightarrow y_H(x) = A\cosh(2x) + B\operatorname{senh}(2x)$$

De acuerdo con matemáticas IV lo único que hay que hacer es encontrar una solución de la no homogenea e imponer las condiciones iniciales. La forma de la solución es $y_P(x) = Q\cosh(3x)$ donde Q es una constante por determinar

$$y_P''(x) - 4y_P(x) = 9Q\cosh(3x) - 4Q\cosh(3x) = 5Q\cosh(3x) \Rightarrow Q = 1$$

De manera que la solución más general es

$$y(x) = y_P(x) + y_H(x) = \cosh(3x) + A\cosh(2x) + B\operatorname{senh}(2x)$$

Imponemos las condiciones iniciales para hallar A y B:

$$0 = y(-1) = \cosh 3 + A\cosh 2 - B\operatorname{senh} 2$$

$$1 = y'(-1) = -3\operatorname{senh} 3 - 2A\operatorname{senh} 2 + 2B\cosh 2$$

Despejando A y B despues de cierto cálculo podemos encontrar la misma solución.